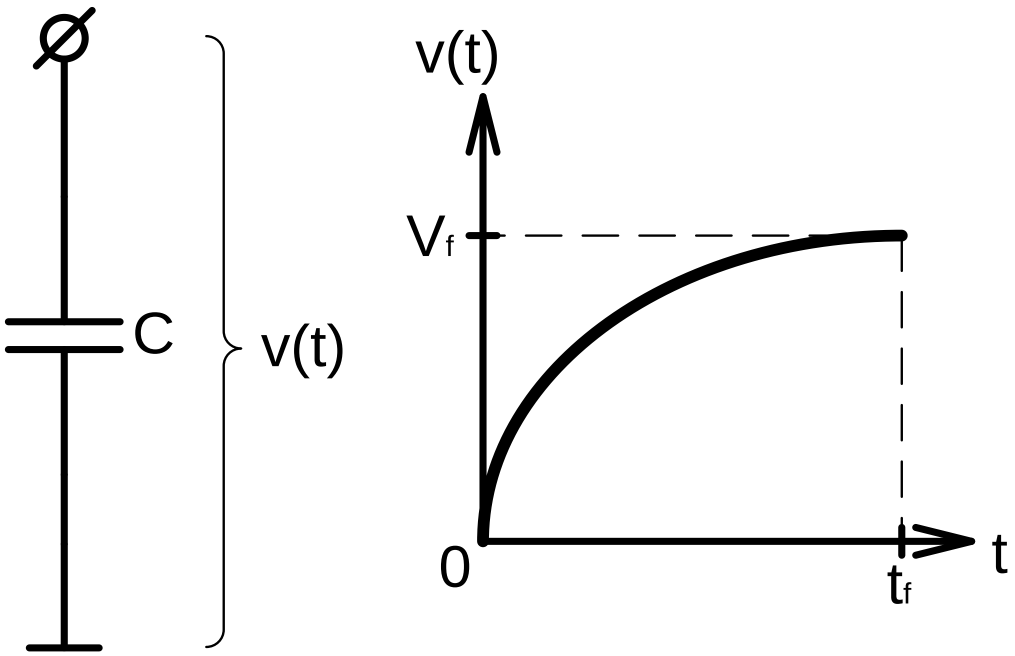
Упражнение 1.14

Определите энергию, запасаемую конденсатором емкостью С, когда его заряжают от нуля вольт до некоторого конечного значения V_f .Ток заряда не постоянный (хотя, если вы предположите обратное, то вреда не будет). В каждый момент времени скорость накопления энергии в конденсаторе будет определяться произведением напряжения и тока: v(t)·i(t), [Дж/с]. Поэтому вам необходимо проинтегрировать приращение энергии в конденсаторе по всему периоду зарядки:

$$dE_C = v(t) \cdot i(t)\,dt\,. \tag{1}$$

В наличии: V_{min} = 0 В; V_{max} = V_f.

E_C – ?



Ток, протекающий через конденсатор во время зарядки, определяется следующим общеизвестным выражением:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}\,. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в (1), получим выражение для приращения энергии конденсатора, удовлетворяющее исходным данным:

$$dE_C = v(t) \cdot C \cdot \frac{dv(t)}{dt} dt;$$

$$dE_C = C \cdot v(t)\, dv(t). \qquad (3)$$

Теперь, проинтегрируем выражение (3) и получим формулу для определения запасенной в конденсаторе энергии:

$$E_C = C \cdot \int_0^{V_f} v(t)\, dv(t);$$

$$E_C = C \cdot \left.\frac{v(t)^2}{2}\right|_0^{V_f};$$

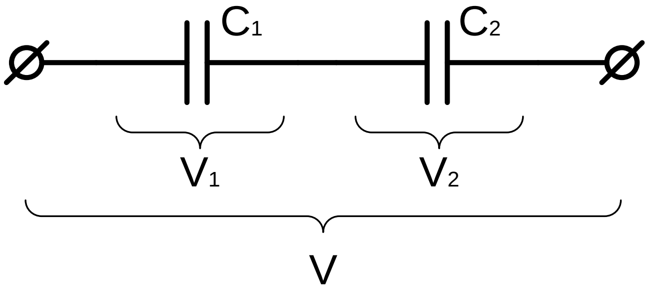
$$E_C = \frac{C \cdot V_f^2}{2}.$$

Упражнение 1.15

Выведите формулу для емкости двух последовательно соединенных конденсаторов. Подсказка: поскольку точка соединения конденсаторов больше никуда не подключена, это означает, что на каждом из них накапливаются одинаковые заряды.

В наличии: $Q_1 = Q_2$.

C – ?



Воспользовавшись правилом Кирхгофа для напряжений, получим:

$$V = V_1 + V_2. \tag{1}$$

Напряжения в схеме можно выразить через величины зарядов и емкостей конденсаторов:

$$V = \frac{Q}{C};\ V_1 = \frac{Q_1}{C_1};\ V_2 = \frac{Q_2}{C_2}. \tag{2}$$

Подставив выражения (2) в (1), получим:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}. \tag{3}$$

Заряды конденсаторов будут не только равны между собой, но и общий заряд будет един для всей нашей системы:

$$Q = Q_1 = Q_2 = \text{const}. \tag{4}$$

Учитывая условие (4), выражение (3) примет вид:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \tag{5}$$

Преобразовав выражение (5), получим формулу для емкости двух последовательно соединенных конденсаторов:

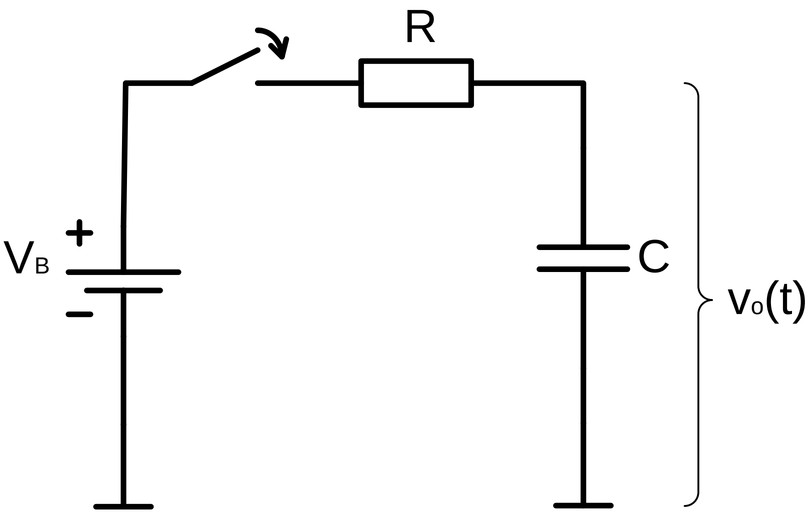
$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

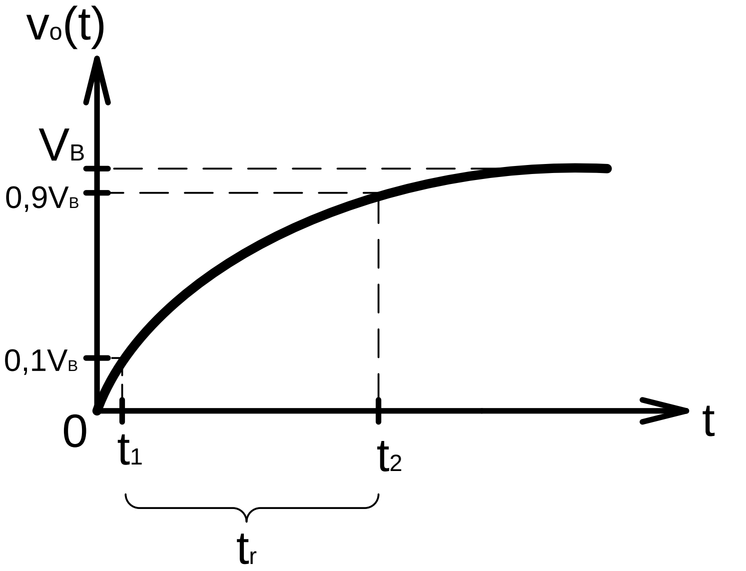
Упражнение 1.16

Покажите, что время нарастания выходного сигнала (время, за которое сигнал меняется с уровня 10% до уровня 90% от его максимального значения) при зарядке конденсатора через резистор, будет равно 2,2RC.

В наличии: $v_o(t_1) = 0{,}1V_B$; $v_o(t_2) = 0{,}9V_B$.

$\{t_r = 2{,}2RC\}$ – ?





В соответствии с условиями упражнения время нарастания сигнала будет равно:

$$t_r = t_2 - t_1 . \tag{1}$$

Из материалов книги нам известно, что функция заряда конденсатора будет иметь вид:

$$v_o(t) = V_В \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{t}{RC}\right]\right). \tag{2}$$

В момент времени t_1, функция (2) примет вид:

$$0{,}1V_в = V_в \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{t_1}{RC}\right]\right). \quad (3)$$

С помощью выражения (3), получаем момент времени t_1:

$$0{,}1 = 1 - \exp\left[-\frac{t_1}{RC}\right];$$

$$t_1 = -RC \cdot \ln(0{,}9). \quad (4)$$

В момент времени t_2, функция (2) примет вид:

$$0{,}9V_в = V_в \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{t_2}{RC}\right]\right). \quad (5)$$

С помощью выражения (5), получаем момент времени t_2:

$$0{,}9 = 1 - \exp\left[-\frac{t_2}{RC}\right];$$

$$t_2 = -RC \cdot \ln(0{,}1). \quad (6)$$

Подставив выражения (4) и (6) в формулу (1), мы сможем определить время нарастания сигнала при заряде конденсатора через резистор:

$$t_r = -RC \cdot (\ln(0{,}1) - \ln(0{,}9)) = -RC \cdot \ln\left(\frac{0{,}1}{0{,}9}\right);$$

$$t_r \approx 2{,}2RC.$$

Замечание.

Аналогичным образом можно доказать, что за время (время спада сигнала) равное 2,2 RC, конденсатор разряжается через резистор с 90% до 10% от максимального уровня напряжения на нем. Точно таким же образом обстоят дела и с правилом «5RC». Правило «5RC» гласит, что за время, равное 5RC, конденсатор заряжается (или разряжается) через резистор на 99% от максимального уровня напряжения на нем.

Упражнение 1.17

На рисунке 1.36 изображена электрическая схема, со следующими параметрами: $R_1 = R_2 = 10$ кОм; $C = 0{,}1$ мкФ. Определите функцию изменения выходного напряжения во времени при скачкообразном изменении входного напряжения. Изобразите эту функцию графически.

В наличии: $R_1 = R_2 = 10$ кОм; $C = 0{,}1$ мкФ.

$v_o(t)$ – ?

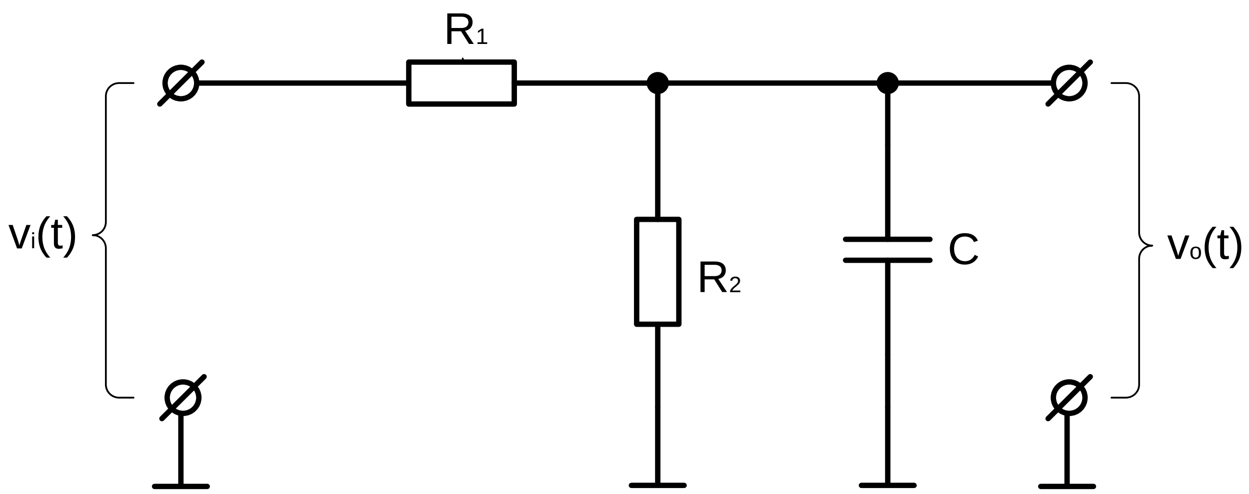
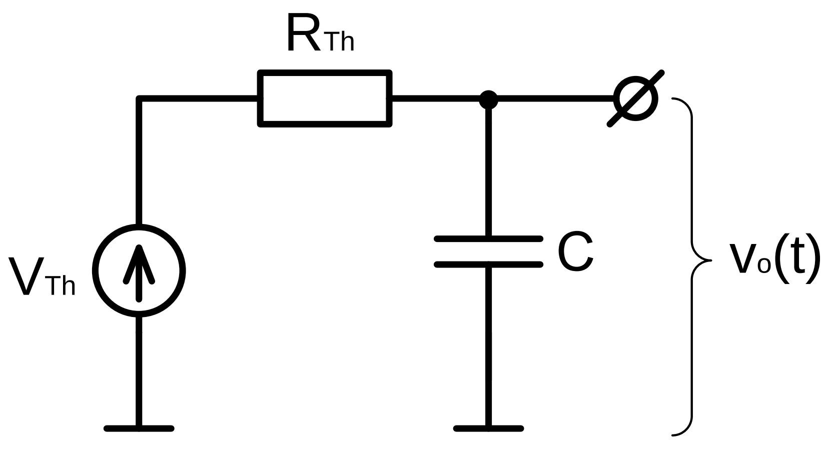


Рисунок 1.36

Для решения упражнения прибегнем к эквивалентной схеме Тевенина, как и советуют авторы.



Как мы уже знаем, напряжение эквивалентного источника будет равно выходному напряжению с делителя, образованного резисторами R_1 и R_2:

$$V_{Th} = V_i \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$V_{Th} = V_i \cdot \frac{10}{10+10} = 0{,}5V_i. \tag{1}$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного источника для делителя напряжения будет равно:

$$R_{Th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2};$$

$$R_{Th} = \frac{10 \cdot 10}{10+10} = 5 \text{ кОм}. \tag{2}$$

При скачкообразном изменении входного напряжения, конденсатор начнет заряжаться, поэтому временная функция на выходе нашей схемы будет иметь следующий вид:

$$v_o(t) = V_{Th} \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{t}{R_{Th} \cdot C}\right]\right). \tag{3}$$

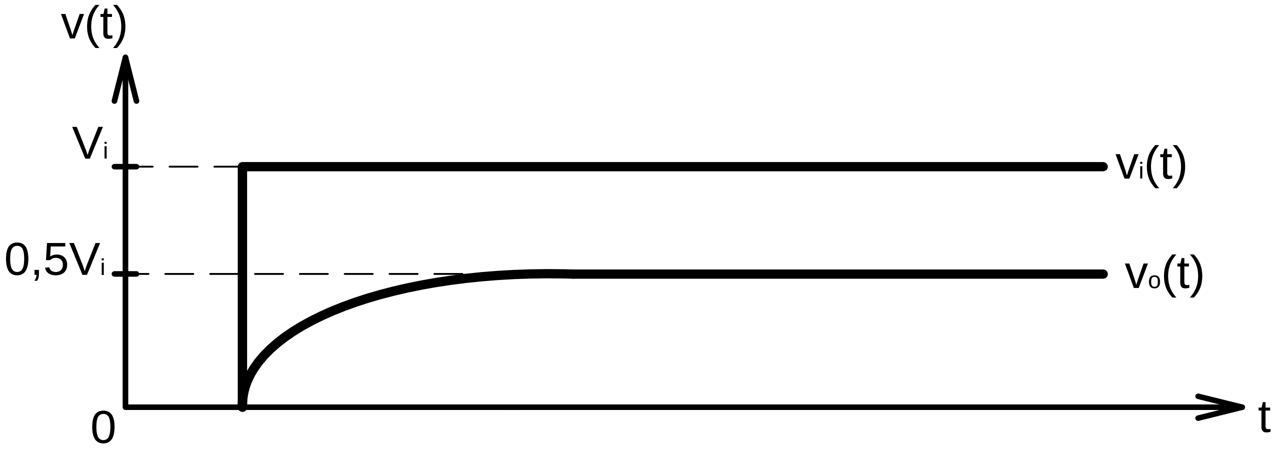
Вычислим значение постоянной времени для нашей RC-цепи с учетом (2):

$$\tau = R_{Th} \cdot C;$$

$$\tau = 5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6} = 0{,}5 \text{ мс}. \tag{4}$$

С учетом рассчитанных параметров (1) и (4), выражение (3) примет окончательный вид:

$$v_o(t) = 0{,}5V_i \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{t}{0{,}5 \cdot 10^{-3}}\right]\right).$$


v(t)
Vi
0,5Vi
vi(t)
vo(t)
0
t